

Πρόταση

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$

Έστω $f \in \mathcal{R}$ και $y \in A''$ τότε ισχύει:

i) $\limsup_{x \rightarrow y} f(x) = l$ αν $\forall (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0): x \in B_0(y, \delta) \cap A \Rightarrow f(x) \leq l + \epsilon$

ii) $\liminf_{x \rightarrow y} f(x) \geq l$ αν $\forall (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0): x \in B_0(y, \delta) \cap A \Rightarrow f(x) \geq l - \epsilon$

Απόδειξη

($\Rightarrow$) Έστω ότι $\limsup_{x \rightarrow y} f(x) \leq l$ τότε $(\forall \epsilon > 0)$ ισχύει: $\limsup_{x \rightarrow y} f(x) < l + \epsilon$

οπότε $\inf_{x \rightarrow y} \sup \{f(x) : x \in B_0(y, \delta) \cap A\} < l + \epsilon$; Εφόσον το $\inf$ είναι μικρότερο ω $l + \epsilon$ έπεται ότι $(\exists \delta > 0) : \sup \{f(x) : x \in B_0(y, \delta) \cap A\} \leq l + \epsilon$ άρα $\forall x \in B_0(y, \delta) \cap A \Rightarrow f(x) \leq l + \epsilon$

($\Leftarrow$) Έστω $\epsilon > 0$ τότε λόγω της πρότασης $(\exists \delta > 0): x \in B_0(y, \delta) \cap A \Rightarrow f(x) \leq l + \epsilon$

άρα εφόσον η παρενέσω σχέση ισχύει $\forall x \in B_0(y, \delta) \cap A$ έπεται ότι $\sup \{f(x) : x \in B_0(y, \delta) \cap A\} \leq l + \epsilon$ έπε εφόσον για ένα δ ισχύει

η παρενέσω θα ισχύει και $\limsup_{x \rightarrow y} f(x) = \sup \{f(x) : x \in B_0(y, \delta) \cap A\} \leq l + \epsilon$

παίρνοντας $\epsilon \rightarrow 0$ έχουμε ότι $\limsup_{x \rightarrow y} f(x) \leq l$ ✓

Υπενθύμιση: $\inf(-f) = -\sup f$

($\Rightarrow$) (ii) Έστω $\liminf_{x \rightarrow y} f(x) \geq l$ (*) τότε

$$\liminf_{x \rightarrow y} (-f(x)) = \sup_{\delta > 0} \{ \inf \{ -f(x) : x \in B_0(y, \delta) \cap A \} \} =$$

$$= \sup_{\delta > 0} \{ -\sup \{ f(x) : x \in B_0(y, \delta) \cap A \} \} = -\inf_{\delta > 0} \sup \{ f(x) : x \in B_0(y, \delta) \cap A \} =$$

$$= -\limsup_{x \rightarrow y} f(x)$$

τότε εφόσον ισχύει η (*) έχουμε $-\limsup_{x \rightarrow y} f(x) \geq l$ ή $\limsup_{x \rightarrow y} (-f(x)) \leq -l$ έπε σύμφωνα $l \leq$

το (i) θα ισχύει $(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0): x \in B_0(y, \delta) \cap A \Rightarrow -f(x) \leq l + \epsilon \Rightarrow$

($\Leftarrow$) Βγαίνει οποιως. $f(x) \geq l - \epsilon$

Πρόταση

Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και έστω $y \in A''$. Τότε ισχύει: $\limsup_{x \rightarrow y} f(x) = \liminf_{x \rightarrow y} f(x)$

αν ω $\lim_{x \rightarrow y} f(x)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}^*$. Επίσης, ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow y} f(x) = \liminf_{x \rightarrow y} f(x) = \limsup_{x \rightarrow y} f(x)$$

Ανάλυση ο.π.μ

Απόδειξη

($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι $\lim_{x \rightarrow y} \sup f(x) = \lim_{x \rightarrow y} \inf f(x) = L$

Έστω $\varepsilon > 0$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1) $L \in \mathbb{R}$, Από την προηγ. πρόταση έφόσον $\lim_{x \rightarrow y} \sup f(x) \leq L$ έχουμε $(\exists \delta_1 > 0) : x \in B_0(y, \delta_1) \cap A \Rightarrow f(x) \leq L + \varepsilon$

όμοια έφόσον $\lim_{x \rightarrow y} \inf f(x) \geq L$

$(\exists \delta_2 > 0) : x \in B_0(y, \delta_2) \cap A \Rightarrow f(x) \geq L - \varepsilon$

Επιλέγοντας $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ έχουμε ότι για

$x \in B_0(y, \delta) \cap A \Rightarrow L - \varepsilon \leq f(x) \leq L + \varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon$

Άρα $\lim_{x \rightarrow y} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow y} \inf f(x) = \lim_{x \rightarrow y} \sup f(x)$

2) $L = -\infty$, τότε έφόσον $\lim_{x \rightarrow y} \sup f(x) = -\infty$ ισχύει

$\lim_{x \rightarrow y} \sup f(x) \leq -\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon$ οπότε από προηγ. πρόταση έχουμε ότι:

$(\exists \delta > 0) : x \in B_0(y, \delta) \cap A \Rightarrow f(x) \leq -\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon + \varepsilon$ δηλ

$(\exists \delta > 0) : x \in B_0(y, \delta) \cap A \Rightarrow f(x) \leq -\frac{1}{\varepsilon}$. Άρα $\lim_{x \rightarrow y} f(x) = -\infty$

3) $L = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow y} \inf f(x) = +\infty$ και δε ισχύει:

$\lim_{x \rightarrow y} \inf f(x) \geq \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon = 1$ έπε λόγω της προηγ. πρότασης

$(\exists \delta > 0) : x \in B_0(y, \delta) \cap A \Rightarrow f(x) \geq \frac{1}{\varepsilon}$ Άρα $\lim_{x \rightarrow y} f(x) = +\infty$

($\Leftarrow$) Έστω $\lim_{x \rightarrow y} f(x) = L$. Διακρίνουμε περιπτώσεις.

1) $L \in \mathbb{R}$ τότε $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : x \in B_0(y, \delta) \cap A \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

$\Rightarrow f(x) \leq L + \varepsilon$ (1)

$\Rightarrow f(x) \geq L - \varepsilon$ (2)

Λόγω της (1) από την προηγ. πρόταση έχουμε ότι:

$\lim_{x \rightarrow y} \sup f(x) \leq L$, ενώ λόγω της (2): $\lim_{x \rightarrow y} \inf f(x) \geq L$

έπε $L \leq \lim_{x \rightarrow y} \inf f(x) \leq \lim_{x \rightarrow y} \sup f(x) \leq L$

έπε $\lim_{x \rightarrow y} \inf f(x) = \lim_{x \rightarrow y} \sup f(x) = \lim_{x \rightarrow y} f(x)$

2) $L = +\infty$, τότε $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : x \in B_0(y, \delta) \cap A \Rightarrow f(x) \geq \frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon$

από προηγ. πρόταση ισχύει: $\lim_{x \rightarrow y} \inf f(x) \geq \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0$, έφόσον ισχύει $\forall \varepsilon > 0$ έχουμε: $\lim_{x \rightarrow y} \inf f(x) = +\infty$

Έφόσον $\lim_{x \rightarrow y} \inf f(x) \leq \lim_{x \rightarrow y} \sup f(x)$ έπεται ότι

$\lim_{x \rightarrow y} f(x) = \lim_{x \rightarrow y} \inf f(x) = \lim_{x \rightarrow y} \sup f(x) = +\infty$

3) $L = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow y} f(x) = -\infty$ έπεται ότι $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : x \in B_0(y, \delta) \cap A \Rightarrow f(x) \leq -\frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon$

έπε από προηγ. πρόταση $\lim_{x \rightarrow y} \sup f(x) \leq -\frac{1}{\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0$.

ισχύει $\forall \varepsilon > 0$ έπε $\lim_{x \rightarrow y} \sup f(x) = -\infty$

Άσκηση

Να υπολογίσετε το $\limsup_{x \rightarrow y} f(x)$ και το $\liminf_{x \rightarrow y} f(x)$
όπου $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$, $y \rightarrow 0, \pm\infty$

Λύση

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ υπάρχει διότι $|\sin x| \leq 1$ άρα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ (φράση της προηγούμενης)

Άρα σίγουρα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \inf f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sup f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

και το $\pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \inf f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sup f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$$

Πρόταση

Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $y \in A''$. Τότε υπάρχουν ακολουθίες (x_n)

και (z_n) τέτοιες ώστε $(x_n) \subseteq A \setminus \{y\}$ και $(z_n) \subseteq A \setminus \{y\}$ ζ.ω.:

i) $\lim x_n = y$ και $\limsup_{x \rightarrow y} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$

ii) $\lim z_n = y$ και $\liminf_{x \rightarrow y} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)$

Απόδειξη

• Ας εξετάσουμε την περίπτωση $\limsup_{x \rightarrow y} f(x) = L$ και υποθέτουμε:

1) $L \in \mathbb{R}$, Ας υποθέτουμε ότι y (ii) δε ισχύει, αυτό σημαίνει ότι L πλησιάζει σημείο

$$(\exists \varepsilon_0 > 0)(\exists \delta_1 > 0) : x \in B_0(y, \delta_1) \Rightarrow f(x) > L + \varepsilon_0 \quad \text{ή} \quad f(x) < L - \varepsilon_0 \quad (3)$$

Εφόσον $\limsup_{x \rightarrow y} f(x) \leq L$. Αν ποζ. ποζ. είναι ότι

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : x \in B_0(y, \delta) \cap A \Rightarrow f(x) \leq L + \varepsilon$$

Επιλέγοντας, $\varepsilon = \varepsilon_0$ έχουμε ότι $(\exists \delta_2 > 0) : x \in B_0(y, \delta_2) \cap A \Rightarrow f(x) \leq L + \varepsilon_0$ (4)

Τότε εάν $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ για $x \in B_0(y, \delta) \cap A$

οι (3) ή (4) δε συνδυάζονται δηλ.

ή $x \in B_0(y, \delta) \cap A$ ισχύει $f(x) < L - \varepsilon_0$ οπότε

$$\sup\{f(x) : x \in B_0(y, \delta) \cap A\} \leq L - \varepsilon_0 \quad \text{άρα}$$

$$L = \limsup_{x \rightarrow y} f(x) = \inf_{\delta > 0} \sup\{f(x) : x \in B_0(y, \delta) \cap A\} \leq L - \varepsilon_0$$

Άρα $(\exists x_n) \subseteq A \setminus \{y\}$ τέτοιες ώστε $x_n \rightarrow y$: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \limsup_{x \rightarrow y} f(x) = L$

2) $L = +\infty$, Έστω ότι (i) δεν ισχύει τότε
 $(\exists \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : x \in B_0(y, \delta) \cap A \Rightarrow f(x) < \frac{1}{\varepsilon}$ άρα και
 $\sup\{f(x) : x \in B_0(y, \delta) \cap A\} \leq \frac{1}{\varepsilon}$

$L = \lim_{x \rightarrow y} \sup f(x) = \inf_x \sup\{f(x) : x \in B_0(y, \delta) \cap A\} \leq \frac{1}{\varepsilon}$ Αλλά
 Άρα το L δεν είναι φερόμενο από $(\exists x_n) : \lim x_n = y$ & $\lim f(x_n) = L$

3) $L = -\infty$, τότε $\liminf_{x \rightarrow y} f(x) \leq \limsup_{x \rightarrow y} f(x) = -\infty$

Άρα $\lim_{x \rightarrow y} f(x)$ υπάρχει και $\lim_{x \rightarrow y} f(x) = -\infty$, οπότε
 $\forall (x_n) \subseteq A \setminus \{y\} \text{ με } x_n \rightarrow y \text{ θα ισχύει: } \lim f(x_n) = -\infty = L$

(ii) Για την περίπτωση το $\liminf_{x \rightarrow y} f(x)$ χροίται: $\liminf_{x \rightarrow y} f(x) = -\limsup_{x \rightarrow y} (-f(x))$ οπότε σύμφωνα με το (i)

$(\exists z_n) : \lim_{x \rightarrow y} z_n = y$ και $\lim_{x \rightarrow y} (-f(z_n)) = \limsup_{x \rightarrow y} (-f(x))$ άρα
 $\lim_{x \rightarrow y} f(z_n) = -\limsup_{x \rightarrow y} (-f(x)) = \liminf_{x \rightarrow y} f(x)$

Πρόταση

Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Τότε $\forall y \in A''$ ισχύει ότι

$\limsup_{x \rightarrow y} f(x) = \sup \Gamma_y$ και $\liminf_{x \rightarrow y} f(x) = \inf \Gamma_y$

όπου $\Gamma_y = \{x \in \mathbb{R}^* : \exists (x_n) \subseteq A \setminus \{y\} \text{ με } x_n \rightarrow y \text{ και } \lim f(x_n) = x\}$

Απόδειξη

Να υπολογίσουμε το $\limsup_{x \rightarrow y} f(x)$ & το $\liminf_{x \rightarrow y} f(x)$ όταν
 $f(x) = \sin x$ στο $+\infty$

Λύση

$-1 \leq f(x) \leq 1$, Παίρνουμε $x_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$ τότε $x_n \rightarrow +\infty$

Επίσης $f(x_n) = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1$ άρα $\lim f(x_n) = 1$

Ακόμη, αν $z_n = 2n\pi - \frac{\pi}{2}$, $z_n \rightarrow +\infty$, $f(z_n) = \sin(2n\pi - \frac{\pi}{2}) = -1$

Άρα $\lim f(z_n) = -1$, οπότε

$\liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$ και $\limsup_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

Άσκηση

Να υπολογιστεί $\limsup_{x \rightarrow \infty} f(x)$ και $\liminf_{x \rightarrow \infty} f(x)$
όπου $f(x) = 1 + \sin^2 x$ ο $x \rightarrow \infty$

Λύση

$$1 \leq f(x) \leq 2.$$

Έστω, $x_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, $x_n \rightarrow \infty$ ή $1 + \sin^2 x_n = \dots = 2$
ήτοι $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 2$.

Αν $y_n = 2n\pi$, $y_n \rightarrow \infty$ και $f(y_n) = 1 + \sin^2 y_n = 1$
ήτοι $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = 1$.

Εν συνεπεί εφόσον $\limsup_{x \rightarrow \infty} f(x) = \sup \Gamma_f = 2$
και $\liminf_{x \rightarrow \infty} f(x) = \inf \Gamma_f = 1$